المحاضرة الرابعة عشر

تطبيقات التكامل المحدد في الهندسة والميكانيك (2)

درسنا في المحاضرة السابقة حساب مساحة السطوح المستوية بالشكل الديكارتي، والوسيطي، والقطبي وأيضا **حساب** أطوال المنحنيات. وفي هذه المحاضرة ندرس الهجوم الدورانية والمساحات الدورانية ديكارتيا ووسيطيا.

14.1-حساب الحجوم الدورانية:

هي إحدى أهم التطبيقات للتكامل المحدد والحجم الدوراني ينشأ من دوران مساحة حول محور يسمى محور الدوران إذا أدارت المساحة المحددة بالمنحني $y=\sqrt{1-x^2}$ ومحور السينات حول محور السينات تكون نتيجة الدوران عبارة عن كرة. لنعالج حالتين:

14.1.1-حساب الحجوم الدورانية ديكارتياً

نظرية: لتكن $y=f(x)$ دالة متصلة على $[a,b]$ ومنحني f يقع إلى جانب واحد من محور السينات.عندئذٍ الحجم الناشئ عن دوران المساحة المحددة بالمنحني $y=f(x)$ ومحور السينات والمستقيمين $x=a \ , x=b$ حول محور السينات يعطى بالعلاقة:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx=\pi\int_a^b y^2 dx$$

مثال (1): أوجد الحجم الناشئ من دوران المساحة المحددة بالمنحني $y=\sqrt{1-x^2}$ ومحور السينات دورة كاملة حول محور السينات.

الحل: نوجد نقاط تقاطع المنحني مع محور السينات وذلك بجعل

$$x=\pm1 \Leftarrow 21-x^2=0 \Leftarrow y=0$$

أي أن المنحني يقطع محور السينات في نقطتين $(-1,0)$, $(1,0)$ وويكون الحجم الناشئ من الدوران يعطى بالعلاقة:

$$V=\int_a^b \pi y^2\,dx = V=\int_{-1}^{1}\pi(1-x^2)\,dx$$

$$=\left[\pi\left(x-\frac{x^2}{3}\right)\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}\pi$$

مثال (2): أوجد الحجم الناشئ عن دوران القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ حول أحد محوريه.

الحل: نفرض أن الدوران حول محور السينات فيكون التكامل من $x=-a$ إلى $x=a$ ولدينا

$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ ويكون:

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2\,dx=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx$$

$$=\frac{\pi b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a}=\frac{4\pi b^2a}{3}$$

حالة خاصة: إذا كان $a=b=r$ فإننا نحصل على حجم الكرة $V=\frac{4\pi r^3}{3}$ التي نصف قطرها r.

ملاحظة (1): بنفس طريقة برهان النظرية يمكننا أن نبرهن أن الحجم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالمنحني $x=g(y)$ ومحور الصادات والمستقيمين $y=c$, $y=d$ حول محور الصادات يعطى بالعلاقة:

$$V=\int_{c}^{d}\pi[g(y)]^2\,dy$$

مثال (3): بفرض أن الدوران حول محور الصادات فيكون

$$x^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)\,,\ -b\le y\le b$$

$$V=\pi\int_{-b}^{b}x^2\,dy=\pi\frac{a^2}{b^2}\int_{-b}^{b}(b^2-y^2)dy=\frac{\pi a^2}{b^2}\left[b^2y-\frac{y^3}{3}\right]_{-b}^{b}=\frac{4\pi a^2b}{3}$$

ملاحظة (2): إذا طلب منا حساب الحجم الناشئ من دوران منطقة محصورة بين منحنيين $y=f(x)$ و $y=g(x)$ بين a و b فإنه يساوي:

$$V=\pi\int_a^b\left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx$$

حيث يمثل الحد الأول الحجم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحني $y=f(x)$ ومحور السينات حول محور السينات والثاني يمثل الحجم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحني $y=g(x)$ ومحور السينات حول محور السينات وطرح الحجمين من بعض يعطي الحجم المطلوب.

مثال (4): أوجد الحجم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y^2=4x$ و $x^2=4y$ حول محور السينات.

الحل: المنحنيان قطعين مكافئين ويتقاطعان عند النقطتين $(0,0)$ و $(4,4)$ كما في الشكل:

$$f(x)=2\sqrt{x}\Leftarrow f^2(x)=4x$$

$$y=g(x)=\frac{x^2}{4}\Leftarrow 4y=x^2$$

وبالتالي حجم المجسم المطلوب يساوي

$$V=\int_0^4\pi\left[4x-\left(\frac{x^2}{4}\right)^2\right]dx=\pi\left[2x^2-\frac{x^5}{80}\right]_0^4=\frac{96\pi}{5}$$

14.1.2-حساب الحجوم الدورانية وسيطياً:

إذا كانت الدالة معطاة وسيطياً بالمعادلات الآتية:

$$y=\psi(t)\ ,\ x=\phi(t)\ ;\ \alpha\le t\le\beta$$

فإن الحجم الناشئ من الدوران:

$$V=\pi\int_\alpha^\beta\psi^2(t).\phi'(t)\,dt=\pi\int_\alpha^\beta y^2(t).x'dt$$

مثال (5): أوجد الحجم الناشئ من دوران السيكلوئيد حول المحور ox.

الحل: إن المعادلات الوسيطية للسيكلوئيد تعطى بالعلاقات

$$x=a(t-\sin t)\ ,\ y=a(1-\cos t)\ ;\ 0\le t\le 2\pi$$

بالتعويض في العلاقة السابقة نجد أن:

$$V=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2.a(1-\cos t)dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}8\sin^6\frac{t}{2}dt=16\pi a^3\int_0^{\pi}\sin^6 u\,du$$

وذلك بفرض أن: $u=\frac{t}{2}\Leftarrow$ عندما $t=0\Leftarrow u=0$ وعندما $t=2\pi$ يكون $u=\pi$ و

$$dt=2du$$

والآن نحسب $I_6=\int_0^{\pi}\sin^6 u\,du$ وذلك حسب قانون التدريج:

$$I_n=\frac{-\cos u\sin^{n-1}u}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

$$I_6=\frac{-\cos u\sin^5 u}{6}+\frac{5}{6}I_4\ ;\ I_4=\frac{-\cos u\sin^3 u}{4}+\frac{3}{4}I$$

$$I_2=\frac{-\cos u\sin u}{2}+\frac{1}{2}I_0\ ;I_0=\int_0^{\pi}du=\pi$$

وبالتعويض والحساب نجد أن: $I_2=\frac{\pi}{2}\ ,I_4=\frac{3\pi}{8}\ ,\ I_6=\frac{15\pi}{48}$

أي أن $I_6=\frac{5\pi}{16}$ ومنه $V=16\pi a^3\frac{5\pi}{16}=5\pi^2a^3$

14.2- حساب المساحات الدورانية:

14.2.1- حساب المساحات الدورانية ديكارتياً:

يقصد بالمساحة الدورانية بأنها المساحة الناتجة عن دوران منحني $y=f(x)$ في فترة $[a,b]$ حول محور السينات وتعطى هذه المساحة الدورانية بالعلاقة:

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

ملاحظة: إذا كان المنحني في الصورة $x=g(y)$ وكان المطلوب حساب مساحة السطح الدوراني حول oy من $y=c$ إلى $y=d$ فإن:

$$S=2\pi\int_c^d g(y)\sqrt{1+g'^2(y)}\,dy$$

مثال (6): أوجد المساحة الدورانية الناتجة من دوران المنحني $y=\sqrt{1-x^2}$ حول محور السينات ox من $x=-1$ إلى $x=1$

الحل: نحسب أولاً y' ثم نعوض

$$y=\sqrt{1-x^2}\;\Rightarrow\; y'=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$S=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx=2\pi\int_{-1}^{1}dx=2\pi x\Big|_{-1}^{1}=4\pi$$

14.2.2-حساب المساحة الدورانية برامترياً:

إذا أعطيت الدالة بمعادلتها الوسيطية الآتية:

$$y=\psi(t)\;,\;x=\phi(t)\;;\alpha\le t\le\beta$$

فإن المساحة الدورانية لهذا المنحني تعطى بالعلاقة:

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta\psi(t)\sqrt{(\phi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$$

مثال (7): أوجد المساحة الدورانية للمنحني $x=e^t\cos t\;,\;y=e^t\sin t$ حيث $0\le t\le\frac{\pi}{2}$

الحل:

$$y'(t)=e^t\sin t+e^t\cos t$$

$$x'(t)=e^t\cos t-e^t\sin t$$

$$S=2\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

$$=2\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^t\sin t\sqrt{(e^t\cos t-e^t\sin t)^2+(e^t\sin t+e^t\cos t)^2}\,dt$$

$$=2\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^t\sin t\sqrt{2e^{2t}(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt$$

$$=2\pi\sqrt{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^t.\sin t.e^t\,dt$$

$$=2\sqrt{2}\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\sin t\,dt=2\sqrt{2}\pi\left[\frac{e^{2t}}{5}(2\sin t-\cos t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

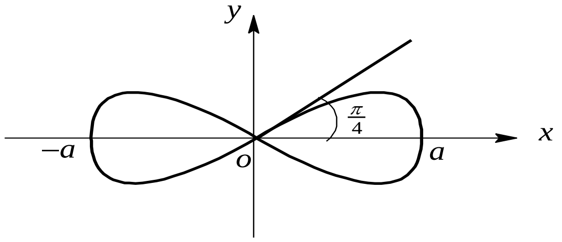
$$=\frac{2\sqrt{2}\pi}{5}(2e^{\pi}+1)$$

14.2.2-حساب المساحة الدورانية قطبياً:

إذا كان المنحني معطى بالشكل القطبي، أي بالمعادلة $r=f(\theta)$، حيث $\alpha\le\theta\le\beta$، فإن المساحة الدورانية لهذا المنحني تعطى بالعلاقة:

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta} r\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$$

مثال(8): احسب مساحة السطح الدوراني الناتج عن دوران منحني ليملنسكات بيرونولي المعطى بالمعادلة $r^2=a^2\cos 2\theta$ [انظر الشكل (14-1)]، حول المحور القطبي ox.



الشكل (14-1)

الحل: إن منحني الدالة متناظر حول المحاور الإحداثية المتعامدة ومبدأ الإحداثيات. في هذه الحالة تعطى علاقة مساحة السطح الدوراني بالعلاقة:

$$S = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} r\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$$

ومنه نجد:

$$r^2 = a^2\cos 2\theta\;;\; r = a\sqrt{\cos 2\theta} \Rightarrow r' = \frac{-a\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$r^2+r'^2 = a^2\cos 2\theta + \frac{a^2\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{a^2}{\cos 2\theta}$$

وبالتعويض، نجد:

$$S = 4\pi\int_0^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta\frac{a}{\cos 2\theta}d\theta = 4\pi a^2\int_0^{\pi/4}\sin\theta d\theta =$$

$$= 4\pi a^2\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/4} = 4\pi a^2\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right] = 2\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$$

3 .14- عزم العطالة

نعلم من الميكانيك أن عزم العطالة لنقطة مادية، مثل A، كتلتها m بالنسبة لنقطة أو بالنسبة لمحور، يساوي حاصل جداء كتلتها m في مربع بعدها عن النقطة أو عن المحور. وفي الحالة التي يكون لدينا n نقطة مادية $A_1, A_2, \cdots, A_n$ في المستوي الإحداثي xoy، كتلها $m_1, m_2, \cdots, m_n$ على الترتيب، نسمي عزم العطالة لمجموعة هذه النقاط بالنسبة للنقطة O أو بالنسبة لمحور، بحاصل جمع عزوم عطالة كل منها بالنسبة للنقطة O أو بالنسبة لمحور.

فإذا فرضنا أن إحداثيات النقطة A_i ، $i = 1, \cdots, n$ ، في الإحداثيات الديكارتية هي (x_i, y_i) ، وإذا رمزنا لعزوم عطالة هذه المجموعة بالنسبة للمحور $\overrightarrow{ox}$، وللمحور $\overrightarrow{oy}$، وبالنسبة للنقطة O، بالرموز I_x ، I_y و I_O على الترتيب، لكان لدينا:

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2+y_i^2)\;;\; I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2\;;\; I_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2$$

لنفرض الآن أن AB منحني مادي معطى بالمعادلة $y = f(x)$، وبفرض أن هذه الدالة ومشتقها الأول مستمران على المجال $[a,b]$، كما نفرض أن الكثافة الخطية لهذا المنحني ثابتة، وتساوي γ، عندئذ، يعطى عزم عطالة المنحني AB بالنسبة لنقطة المبدأ O بالعلاقة الآتية:

$$I_0 = \gamma \int_a^b \left(x^2 + y^2\right)\sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

وبشكل مشابه، يمكن التعبير عن عزم عطالة القوس (المنحني) AB بالنسبة للمحور $\overrightarrow{ox}$، وللمحور $\overrightarrow{oy}$، كما يلي:

$$I_x = \gamma \int_a^b y^2 \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

$$I_y = \gamma \int_a^b x^2 \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

مثال (9): احسب عزم عطالة نصف دائرة مادية متجانسة بالنسبة لقطرها.

الحل: بتطبيق العلاقة السابقة، وبفرض أن المحور ox ينطبق على قطر هذه الدائرة، ومركزها هو مبدأ الإحداثيات، نجد أن:

$$I_x = \gamma \int_a^b y^2 \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

حيث $f(x)$ هي الدالة: $f(x) = y = \sqrt{R^2 - x^2}$ وبالتعويض، نجد:

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \Rightarrow \sqrt{1 + f'^2(x)} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$I_x = \gamma \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = 2R\gamma \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

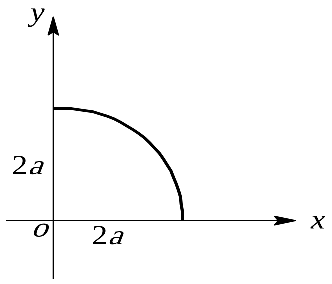
$$= 2R\gamma \cdot \frac{\pi R^2}{4} = \pi\gamma \frac{R^3}{2}$$

14.4- تعيين مركز ثقل سلك مادي:

ليكن لدينا المنحني AB منحنيا ماديا يعطى بالمعادلة $y = f(x)$ ، ومستمر هو ومشتقه على المجال $[a,b]$، وبفرض أن الكثافة الخطية في جميع أقسام المنحني متساوية، وتساوي γ (أي أن السلك متجانس)، عندئذ يعطى مركز ثقل المنحني AB، والذي سنرمز له بالنقطة $c(x_c, y_c)$ بالعلاقات:

$$x_c = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx} \qquad y_c = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx}$$

مثال (10): احسب مركز ثقل قوس ربع الدائرة التي نصف قطرها 2a، والتي تقع في الربع الأول [الشكل (14-2)].



الشكل (14-2)

الحل: إن معادلة الدائرة التي مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها $2a$ تعطى بالعلاقة: $x^2 + y^2 = 4a^2$ ،

وبالتالي، يعطى قوس ربع الدائرة بالعلاقة: $y = \sqrt{4a^2 - x^2}$ ومنه:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{4a^2 - x^2}} \Rightarrow \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{4a^2 - x^2}}$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{\frac{4a^2}{4a^2 - x^2}} = \frac{2a}{\sqrt{4a^2 - x^2}}$$

وبالتعويض في علاقة X_c السابقة نجد:

$$x_c=\frac{\int_0^{2a} x\frac{2a}{\sqrt{4a^2-x^2}}dx}{\int_0^{2a}\frac{2a}{\sqrt{4a^2-x^2}}dx}=\frac{\left[-2a\sqrt{4a^2-x^2}\right]_0^{2a}}{2a\arcsin\frac{x}{2a}\Big]_0^{2a}}=\frac{4a^2}{2a\pi/2}=\frac{4a}{\pi}$$

أما الترتيب y_c ، فيعطى بالعلاقة:

$$y_c=\frac{\int_0^{2a} y\sqrt{1+y'^2}dx}{\int_0^{2a}\sqrt{1+y'^2}dx}=\frac{\int_0^{2a}\sqrt{4a^2-x^2}\frac{2a}{\sqrt{4a^2-x^2}}dx}{\int_0^{2a}\frac{2a}{\sqrt{4a^2-x^2}}dx}=\frac{-2ax]_0^{2a}}{a\pi}=\frac{4a^2}{a\pi}=\frac{4a}{\pi}$$

أي مركز ثقل قوس الدائرة هو النقطة: $c\left(\frac{4a}{\pi},\frac{4a}{\pi}\right)$

5. 14- تمارين محلولة

تمرين (1): اوجد حجم المجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحصورة بين المنحني $x=y^2$ والمستقيم $y=x-2$ حول محور الصادات.

الحل: بحل المعادلتين $x=y^2$ و $y=x-2$ نحصل على نقطتي التقاطع $(4,2)$, $(1,-1)$ كما في الشكل مع ملاحظة أن:

$y^2=g(y)\le f(y)=y+2$ لجميع قيم $y\in[-1,2]$

لذا يكون الحجم المطلوب يساوي:

$$V=\int_{-1}^{2}\pi\left[(y+2)^2-(y^2)^2\right]dy=\int_{-1}^{2}\pi\left(y^2+2y+4-y^4\right)dy$$

$$=\pi\left[\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+4y-\frac{y^5}{5}\right]_{-1}^{2}=\frac{72\pi}{5}.$$

تمرين (2): أوجد المساحة الدورانية الناشئة عن دوران القطع المكافئ

$y^2 = 2px \quad ; x \in [0, p)$ حول محوره.

الحل: لدينا $y = \sqrt{2px}$ ومنه

$$y' = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2x}} \Rightarrow 1 + y'^2 = 1 + \frac{p}{2x} = \frac{2x + p}{2x}$$

بالتعويض في علاقة المساحة المعطاة ديكارتيا نجد:

$$S = 2\pi \int_0^p \sqrt{2px} \sqrt{\frac{2x + p}{2x}} dx$$

$$= 2\pi\sqrt{p}.\frac{1}{3}(2x + p)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^p = \frac{2\pi p^2}{3}(3\sqrt{3} - 1)$$

تمرين (3): احسب مساحة السطح الدوراني الناتج من دوران المنحني $y = \sin x$ حول محور السينات من أجل المجال $[0, \pi]$.

الحل: إن السطح المطلوب يعطى بالعلاقة:

$$S = 2\pi \int_0^\pi y\sqrt{1 + y'^2}dx = 2\pi \int_0^\pi \sin x\sqrt{1 + \cos^2 x}dx$$

لحساب هذا التكامل، نغير المتحول، بفرض أن $\cos x = t \Leftarrow -\sin xdx = dt$، أما حدود التكامل تصبح على الشكل الآتي:

$$x = 0 \Rightarrow t = 1 \, , \; x = \pi \Rightarrow t = -1$$

ويصبح التكامل كما يلي:

$$S = -2\pi \int_{+1}^{-1} \sqrt{1 + t^2}dt = 2\pi \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 + t^2}dt$$

نحسب هذا التكامل بطريقة التجزئة، بفرض أن:

$$dt = dv \Rightarrow v = t \; ; \; \sqrt{1 + t^2} = u \Rightarrow du = \frac{tdt}{\sqrt{1 + t^2}}$$

وبالتعويض نجد:

$$I=\int_{-1}^{+1}\sqrt{1+t^2}dt=\left[t\sqrt{1+t^2}\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{+1}\frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}}dt$$

$$=2\sqrt{2}-\int_{-1}^{+1}\frac{t^2+1-1}{\sqrt{1+t^2}}dt=2\sqrt{2}-I-\int_{-1}^{+1}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=2\sqrt{2}-I+\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

ومنه نجد:

$$2I=2\sqrt{2}+\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\Rightarrow I=\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

ويصبح السطح الدوراني للمطلوب:

$$S=2\pi\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)$$

تمرين (4): احسب مساحة السطح الدوراني الناتج عن دوران قوس السكلوئيد المعطى بالمعادلتين الآتيتين:

$$0\le t\le 2\pi \text{ ،} \; x=a(t-\sin t) \text{ و } y=a(1-\cos t)$$

حول محور السينات.

الحل: بما أن المنحني، كما هو واضح، معطى بالشكل الوسيطي، لذلك نحسب كل من x'_t و y'_t :

$$x'=a(1-\cos t)\;;\;\; y'=a\sin t$$

وبالتعويض في علاقة مساحة السطح الدوراني، نجد أن:

$$S=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt$$

$$=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt-8\pi a^2\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=8\pi a^2\left[\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi}-8\pi a^2\left[\left(\frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{64}{3}\pi a^2$$

إضافات مدرس المقرر